ARITHMÉTIQUE

Exercice 1 (*Division euclidienne*)**.** Réaliser la division euclidienne de a par b avec :

1) $(a,b)=(750,14)$
2) $(a,b)=(15,34)$
3) $(a,b)=(-42,15)$
4) $(a,b)=(2^{2023},8)$
5) $(a,b)=(12345\times 64+6789,64)$
6) $(a,b)=(1+2+\cdots+n,n)$ avec $n\in\mathbb{N}^*$

Calculer les PGCD des couples (a,b) suivants. Donner dans chaque cas un couple de coefficients de Bézout.

$$(a,b)=(69,13) \qquad (a,b)=(45,76) \qquad (a,b)=(350,14)$$

Exercice 2. Déterminer les entiers qui divisent à la fois 318 et 282.

Exercice 3. Montrer que la somme de 5 entiers consécutifs est divisible par 5.
Est-ce que la somme de 4 entiers consécutifs est divisible par 4 ?

Exercice 4 (*Équation diophantienne 1*)**.** On considère l'équation $x^2-y^2=5$. Trouver toutes les solutions (x,y) dans $\mathbb{N}^2$. En déduire toutes les solutions (x,y) dans $\mathbb{Z}^2$.

Exercice 5 (*Équation diophantienne 2*)**.** Résoudre $3x^2+xy=11$ dans $\mathbb{Z}^2$.

Exercice 6. Déterminer les entiers $x\in\mathbb{Z}$ tels que $(x-1)\mid(x+2)$.

Exercice 7. Soit $n\in\mathbb{N}$.

1) Démontrer que $(14n+3)\wedge(21n+4)=1$.
2) Démontrer que $(n^3+2n)\wedge(n^4+3n^2+1)=1$.

Exercice 8 (*Calcul de PGCD et de PPCM*)**.** En utilisant la décomposition en produits de facteurs premiers, calculer :

1) $105\wedge 147$ puis $105\vee 147$.
2) $90\vee 120$
3) $60\wedge 144\wedge 84$.
4) $2\vee 3\vee 4\vee 5\vee 6\vee 7\vee 8\vee 9$.

Exercice 9 (*Comptage de diviseurs*)**.**

1) Décomposer 360 et 1750 en produit de facteurs premiers.
2) Quel est le nombre de diviseurs positifs de 360 ? de 1750 ?
3) Quel est le nombre de diviseurs positifs communs à 360 et 1750 ?

Exercice 10. Soit $a,b\in\mathbb{Z}$. Montrer que $a\wedge b=1 \iff (a+b)\wedge(ab)=1$.

Exercice 11 (*Valuations*)**.** Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $a^n \wedge b^n = (a \wedge b)^n$.

Exercice 12. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel. *Indication : raisonner par l'absurde.*

Exercice 13 ($\star$)**.** Soit $p \geq 5$ un nombre premier. Montrer que $p^2 \equiv 1 \quad [24]$.

Exercice 14 (*Critère de divisibilité*)**.** Soit $a \in \mathbb{N}$ un entier à N chiffres. On note $a_N a_{N-1} \dots a_1$ son écriture en base 10.

1) Montrer que $2 \mid a$ si et seulement si $2 \mid a_1$.
2) Montrer que $3 \mid a$ si et seulement si $3 \mid \displaystyle\sum_{k=1}^{N} a_k$.
3) Montrer que $5 \mid a$ si et seulement si $5 \mid a_1$.
4) Montrer que $6 \mid a$ si et seulement si $2 \mid a$ et $3 \mid a$.
5) Montrer que $9 \mid a$ si et seulement si $9 \mid \displaystyle\sum_{k=1}^{N} a_k$.

Exercice 15 (*Congruences*)**.** Déterminer le dernier chiffre de 7^7.

Exercice 16. Déterminer le reste de la division euclidienne de : **A)** 5^{12} par 11 **B)** 3^{2023} par 7.

Exercice 17. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le reste de la division euclidienne de $6^n - 1$ par 7 appartient à $\{0, 5\}$.

Exercice 18. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $6 \mid (5n^3 + n)$.

Exercice 19 (*Équations de congruences*)**.** Résoudre dans $\mathbb{Z}$:

1) $5x \equiv 3 \quad [17]$
2) $10x \equiv 6 \quad [34]$
3) $10x \equiv 5 \quad [34]$

Exercice 20 (***Exercice banque CCP***)**.** On cherche à résoudre le système suivant, d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$:

$$(S) : \quad \begin{cases} x \equiv 6 \quad [17] \\ x \equiv 4 \quad [15] \end{cases}$$

1) Déterminer une solution particulière $x_0 \in \mathbb{Z}$. On pourra faire le lien avec une relation de Bézout.
2) Déduire les solutions de (S).

Exercice 21 (*Équations diophantiennes du premier degré*)**.** Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes :

$$(E) : 7x + 12y = 5 \qquad (F) : \quad 9x + 15y = 11 \qquad (G) : \quad 9x + 15y = 18$$